On considère le polynôme "universel"

$$P(X) = X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$$

et sa factorisation dans une clôture algébrique du corps K des fractions de l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[a_0, a_1, a_2]$

$$P(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3) \qquad .$$

On pose

$$\rho \;=\; \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_3} \qquad .$$

On constate que l'on a :

$$\frac{(\rho^2 - \rho + 1)^3}{(\rho(1-\rho))^2} \;=\; \frac{(a_2^2 - 3a_1)^3}{\mathrm{dis}(P)} \qquad .$$

On pose

$$\mathrm{J}(P) \;=\; \frac{(a_2^2 - 3a_1)^3}{\mathrm{dis}(P)} \qquad .$$

On constate que l'on a

$$a_2^2 - 3a_1 \;=\; (\alpha_1 + \jmath^2\alpha_2 + \jmath\alpha_3)(\alpha_1 + \jmath\alpha_2 + \jmath^2\alpha_3) \qquad ;$$

on en déduit que si P est un polynôme unitaire du troisième degré, séparable, à coefficients dans $\mathbb{C}$, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{J}(P) = 0$;

(ii) α_1, α_2 et α_3 sont les sommets d'un triangle équilatéral.

. . . .

On considère le polynôme "universel"

$$P(X) = X^4 + a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$$

et sa factorisation dans une clôture algébrique du corps K des fractions de l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[a_0, a_1, a_2, a_3]$

$$P(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)(X - \alpha_4) \qquad .$$

On pose

$$\rho \;=\; \frac{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}{(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)} \qquad .$$

On constate que l'on a :

$$\frac{(\rho^2-\rho+1)^3}{(\rho(1-\rho))^2} \;=\; \frac{(12a_0-3a_1a_3+a_2^2)^3}{\mathrm{dis}(P)} \qquad .$$

On pose

$$\mathrm{J}(P) \;=\; \frac{(12a_0-3a_1a_3+a_2^2)^3}{\mathrm{dis}(P)} \qquad ;$$

on constate que l'on a

$$\mathrm{J}(P) \;=\; \mathrm{J}(\mathrm{F}_P) \qquad ,$$

F_P désignant le polynôme de Ferrari associé à P.

Soit P est un polynôme unitaire du quatrième degré, séparable, à coefficients dans $\mathbb{C}$, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{J}(P)=0$;

(ii) α_1, α_2, α_3 et α_4 sont dans $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ les sommets d'un tétraèdre régulier projectif.